“RACCONTO” SOBRE TÉCNICAS DE CONTEO

TC I

Asociaciones de opciones independientes

Supóngase una fábrica de automóviles que ofrezca las siguientes opciones independientes:
Opción α: Motor a nafta, a gas, o diesel (3 opciones).
Opción β: Con o sin aire acondicionado (2 opciones).
Opción γ: Tres colores distintos (3 opciones).
Evidentemente, cualquier opción α puede ser asociada con cualquier opción β y con cualquier opción γ, teniéndose así que se tiene un total de $3 \times 2 \times 3 = 18$ posibles asociaciones de opciones (ver figura TC I.a).

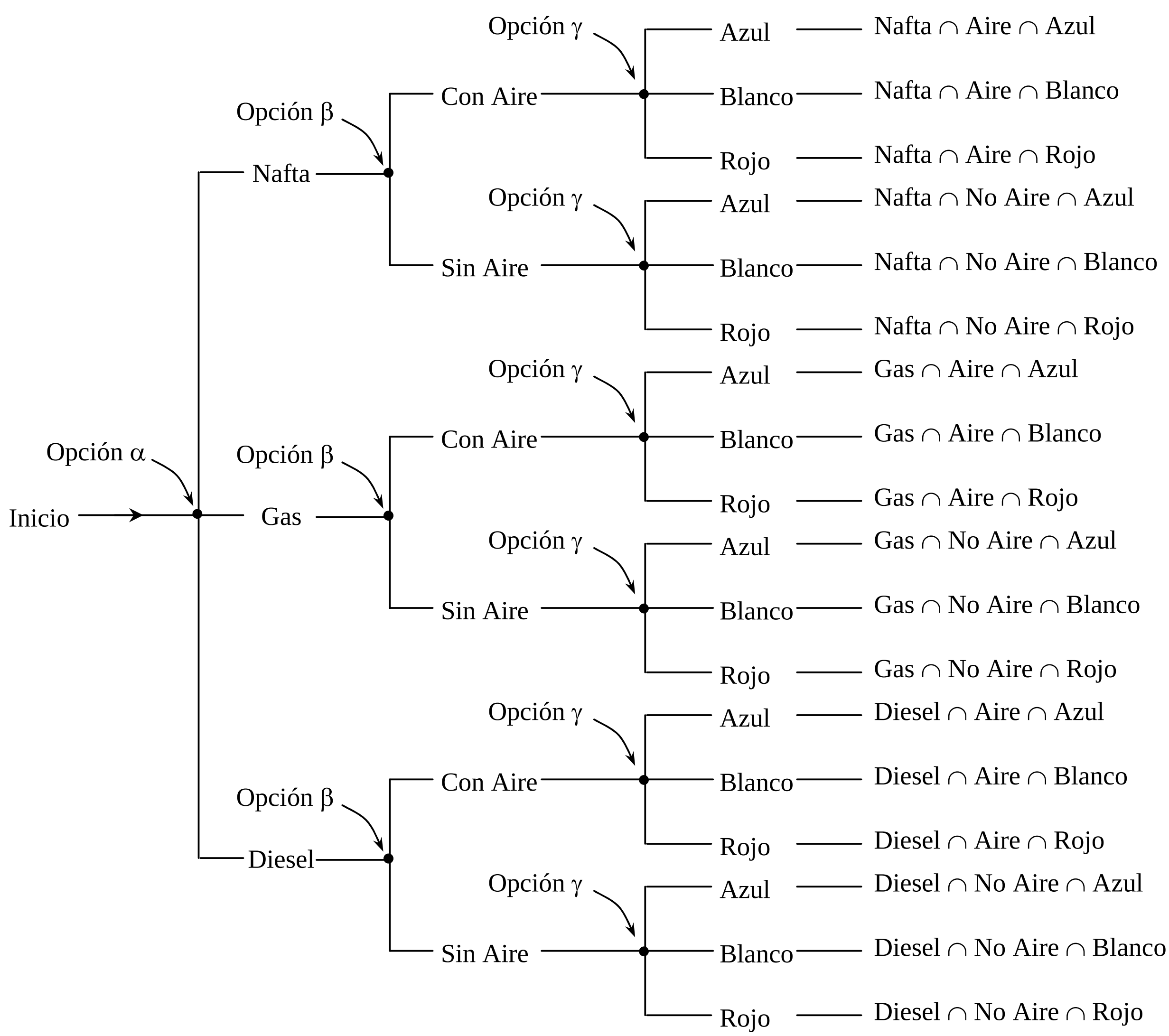

Fig. TC I.a

En general:

Si la cantidad de opciones α es n_α, la cantidad de opciones β es n_β, ... y la cantidad de opciones k es n_k se tiene que:

$$n = \text{Cantidad total de asociación de opciones} = n_\alpha \, n_\beta \ldots n_k \qquad \textbf{[1]}$$

TC II

<u>Variaciones simples</u>

a. Las variaciones simples de n elementos <u>todos distintos entre sí</u> tomados de a k son todas las distintas agrupaciones que pueden formarse con k de dichos elementos de manera tal que <u>una agrupación sea distinta de otra cuando en por lo menos en una misma ubicación de ambas agrupaciones figuren elementos distintos</u>.

Esta definición implica que:

Una agrupación es distinta de otra cuando y solo cuando:

1º. Sus elementos no sean exactamente los mismos.

o sino,

2º. Si sus elementos son exactamente los mismos sus órdenes en sus respectivas agrupaciones sean distintos.

Por ejemplo, las variaciones simples de los cuatro elementos a, b, c y d tomados de a tres son:

(abc), (abd), (acb), (acd), (adb), (adc), (bac), (bad), (bca), (bcd), (bda), (bdc), (cab), (cad), (cba), (cbd), (cda), (cdb), (dab), (dac), (dba), (dbc), (dca), (dcb)

Puede demostrarse fácilmente que:

$$V_{n,k} = \text{Cantidad de variaciones simples de } n \text{ elementos tomados de a } k = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad \textbf{[1]}$$

b. Aplicación.

Se pide indicar cuantas palabras distintas de tres letras (tengan o no sentido) se pueden formar con las letras L, A, P, I, Z.

Dichas palabras serán tales como:

LAP, PAL, IPA, API, ZAL, AZL, etc.

Como una de estas palabras se diferencia de cualquier otra por tener en una o más ubicaciones letras distintas, se tiene que estas palabras constituyen el conjunto de todas las variaciones simples de las 5 letras L, A, P, I, Z tomando de a tres. Por lo tanto:

$$\text{Cantidad de palabras} = V_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

TC III

Permutaciones simples

a. Las permutaciones simples de *n* elementos, todos distintos entre sí son las variaciones simples de dichos elementos tomados de a *n*, o, en otras palabras, son todos los posibles ordenamientos que pueden formarse con dichos elementos.
Por ejemplo, las permutaciones simples de los elementos *a*, *b* y *c* son:

(*abc*), (*acb*), (*bac*), (*bca*), (*cab*), (*cba*)

Por la definición arriba indicada y por **[1]** de TC II se tiene que:

P_n = Cantidad de permutaciones simples de *n* elementos = $V_{n,n} = \dfrac{n!}{\underbrace{(n-n)!}_{=\,0!\,=\,1}} = n!$ **[1]**

b. Aplicación.
Indicar de cuantas maneras pueden sentarse cuatro personas en cuatro asientos distintos. Llamando *a*, *b*, *c* y *d* a las cuatro personas y (*c*, *a*, *d*, *b*) al hecho de que *c* se sentó en el primer asiento, *a* en el segundo, *d* en el tercero y *b* en el cuarto, se tienen que las ubicaciones posibles serán:

(*a*, *b*, *c*, *d*), (*a*, *c*, *b*, *d*), (*d*, *c*, *a*, *b*), etc, es decir las permutaciones simples de las personas *a*, *b*, *c* y *d*. Por lo tanto se tendrá que:

Maneras de sentarse 4 personas en 4 asientos = $P_4 = 4! = 24$

TC IV

Combinaciones simples

a. Las combinaciones simples de *n* elementos todos distintos entre sí tomados de a *k* son las distintas agrupaciones que pueden formarse con *k* de dichos elementos de manera tal que una agrupación sea distinta de la otra cuando no estén formadas por exactamente los mismos elementos, <u>no teniéndose en cuenta el orden que dichos elementos tengan en las agrupaciones</u>.
Por ejemplo, las combinaciones simples de los cuatro elementos *a*, *b*, *c*, *d* tomados de a tres son:

(*a*, *b*, *c*), (*a*, *b*, *d*), (*a*, *c*, *d*), (*b*, *c*, *d*)

Puede demostrarse fácilmente que:

$C_{n,k}$ = Cantidad de combinaciones simples de *n* elementos tomados de a $k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Evidentemente debe ser $k \leq n$.

b. Aplicación.
Dados 5 puntos no alineados, indicar cuantos triángulos pueden formarse usando como vértices de los mismos los puntos antedichos.
Evidentemente, un triángulo queda determinado por tres puntos cualesquiera, sea cual sea el orden en que se elijan dichos puntos, y un triángulo será distinto de otro solo cuando tengan por lo menos un vértice distinto.
Es decir que habrá tantos triángulos como combinaciones de los cinco puntos tomados de a tres.

$$\text{Cantidad de triángulos} = C_{5,3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

TC V

<u>Números combinatorios</u>

Se define:

$$\binom{0}{0} = 1 \qquad \binom{n}{0} = 1 \text{ para } n \text{ natural} \qquad \binom{n}{k} = C_{n,k} \text{ para } 0 < k \leq n, \quad n \text{ natural}$$

Puede demostrarse fácilmente que:

$$\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i} = \binom{n}{i}$$

TC VI

<u>Variaciones con repetición</u>

a. Las variaciones con repetición de elementos de n clases distintas tomadas de a k son las distintas agrupaciones que pueden formarse con k elementos de manera tal que una agrupación se distinga de otra cuando en <u>por lo menos una ubicación tengan elementos de clases distintas</u>, estando permitido (pero no siendo obligatorio) repetir en una misma agrupación elementos de una misma clase (es decir iguales).
Por ejemplo, las variaciones con repetición de los tres elementos a, b y c tomados de a dos son:

(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)

Puede demostrarse que:

$$V'_{n,k} = \left(\begin{array}{l}\text{Cantidad de variaciones con repetición de} \\ \text{elementos de } n \text{ clases tomados de a } k\end{array}\right) = n^k$$

Evidentemente, en el caso de las variaciones con repetición puede ser $k < n$ ó $k = n$ ó $k > n$.

b. Aplicación.
El alfabeto Morse tiene solo dos elementos, punto y raya. Se pide indicar cuantos códigos de cinco elementos pueden formarse.
Un código se distingue de otro cuando no tiene la misma cantidad de puntos (y por lo tanto de rayas), pero en caso de tener la misma cantidad de puntos y rayas también se distinguirán cuando su ordenamiento sea distinto.
Evidentemente, en un mismo código habrá repetición de puntos y/o rayas.
Entonces:

Cantidad de códigos de 5 elementos = $V'_{2,5} = 2^5 = 32$

TC VII

Permutaciones con repetición

a. Sea λ_a elementos *a*, λ_b elementos *b*, …, λ_g elementos *g*. Se llamarán permutaciones con repetición de estos elementos a todas las agrupaciones que pueden formarse colocando en $\lambda_a + \lambda_b + \ldots + \lambda_g$ ubicaciones a los λ_a elementos *a*, los λ_b elementos *b*, …, los λ_g elementos *g*, teniéndose que <u>dos agrupaciones serán consideradas distintas cuando en por lo menos una ubicación figuren elementos distintos</u>.
Por ejemplo, las permutaciones con repetición de tres elementos *a*, dos elementos *b* y un elemento *c* son:

aaabbc, *aaabcb*, *aaacbb*, *aacabb*, *acaabb*, *caaabb*, *aababc*, *aabacb*, *aabcab*, *aacbab*, *acabab*, *caabab*, *abaabc*, *abaacb*, *abacal*, *abcaab*, *acbaab*, *cabaab*, *baaabc*, *baaacb*, *baacab*, *bacaab*, *bcaaab*, *cbaaab*, *aabbac*, *aabbca*, *aabcba*, *aacbba*, *acabba*, *caabba*, *ababac*, *ababca*, *abacba*, *abcaba*, *acbaba*, *cababa*, *baabac*, *baabca*, *baacba*, *bacaba*, *bcaaba*, *cbaaba*, *abbaac*, *abbaca*, *abbcaa*, *acbbaa*, *cabbaa*, *babaac*, *babaca*, *babcaa*, *bacbaa*, *bcabaa*, *cbabaa*, *bbaaac*, *bbaaca*, *bbacaa*, *bbcaaa*, *bcbaaa*, *cbbaaa*.

Puede demostrarse que:

$$P'_{\lambda_a a, \lambda_b b, \ldots, \lambda_g g} = \left(\begin{array}{l} \text{Cantidad de permutaciones con repetición de } \lambda_a \\ \text{elementos } a,\ \lambda_b \text{ elementos } b,\ \ldots,\ \lambda_a \text{ elementos } g \end{array} \right) = \frac{(\lambda_a + \lambda_b + \ldots + \lambda_g)!}{\lambda_a!\lambda_b! \ \ldots \ \lambda_g!}$$

b. Aplicación.
Cuantos códigos de barras se pueden formar con 3 barras gruesas, 2 medianas y 2 finas.
Evidentemente, el código consta de 3 + 2 + 2 = 7 barras, es decir que hay 7 ubicaciones para colocar barras. En esas ubicaciones irán las 3 barras gruesas, las dos medianas y las dos finas. Evidentemente, un código diferirá de otro cuando en una misma ubicación figuren barras de distinto grosor.
Por lo tanto a cada código corresponde una variación con repetición. Por lo tanto:

Cantidad de códigos = $P'_{3g,\, 2m,\, 2f} = \dfrac{(3+2+2)!}{3!\ \ 2!\ \ 2!} = 210$

TC VIII

Binomio de Newton

Puede probarse que:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

(Notar que hay $n + 1$ sumandos).